

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2019
Clasa a XII-a

1. Calculați integralele:

a) (4p) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

b) (3p) $\int_0^{\pi} \arccos(\sin x) dx.$

2. Se consideră numărul real a și $M = [a, +\infty)$. Pe mulțimea M se definește operația $x \circ y = xy - a(x + y) + a^2 + a.$

a) (4p) Arătați că operația este bine definită, iar (M, \cdot) este un monoid comutativ.

b) (3p) Determinați grupul elementelor inversabile ale monoidului $M.$

3. (7p) Dacă H și K sunt subgrupuri ale unui grup G și $H \neq G$, $K \neq G$, arătați că $H \cup K \neq G.$

4. (7p) Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, calculați

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \sqrt[n]{1 + (xy)^n} dy}{x}.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.